Ref : El Amrani p. 409

Developpement : Théorème de Fejèr :

leçon 209
241
246

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique et on pose $\forall k \in \mathbb{Z}$:
$e_k : t \mapsto e^{ikt}$ et $c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt = \langle f, e_k \rangle$

ainsi que $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$; $C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k$

et $u_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$; $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$

Théorème (de Féjèr) :

La suite de fonctions $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Preuve : On cherche à montrer que la suite $\|C_n - f\|_{\infty,[-\pi,\pi]}$ tend vers 0.

Commençons par remarquer que

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds\right) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} f(s)\, e^{ik(t-s)}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s).\ u_n(t-s)\, ds$$

chang. de var $y = t-s$

$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-y)\, u_n(y)\, dy$$

$f(t-y).u_n(y)$ 2π périodique

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y) u_n(y)\, dy$$

donc $C_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\, u_k(y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\ \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k(y)\, dy$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y).\ U_n(y)\, dy$$

(On reconnaît un produit de convolution de f et $\frac{1}{2\pi}.\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]} U_n$)

Lemme : La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'identité dans le sens suivant :

- (U_n) suite de fct positives
- $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U_n(t)\, dt = 1$ i.e. $C_0(U_n) = 1$
- $\forall \pi > a > 0$, $D_a := [-\pi, -a] \cup [a, \pi]$, $\lim_{n\to+\infty}\int_{D_a} U_n(t)\, dt = 0$.

oral : ce n'est pas une approximation de l'identite pour la convolution sur $\mathbb{R}$. Il faudrait la multiplier par $\frac{1}{2\pi}\ \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}$ pour ça

preuve du lemme :

▶ Mq U_n est toujours positive : $\forall t \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$,

$$u_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{it/2}}{e^{it/2}}.\frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{\frac{-it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Donc $U_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} v_k(t) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\left(e^{i(\frac{k+1}{2})t}\right)$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(\frac{k+1}{2})t}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \cdot \mathrm{Im}\left(e^{\frac{it}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \cdot \mathrm{Im}\left(e^{\frac{it}{2}} \cdot \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \mathrm{Im}\left(e^{\frac{it}{2}} \cdot \frac{e^{it(\frac{n+1}{2})}}{e^{it/2}} \cdot \frac{e^{-it(n+1)/2} - e^{it(n+1)/2}}{e^{-it/2} - e^{it/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin(t/2)} \mathrm{Im}\left(e^{it\frac{(n+1)}{2}} \cdot \frac{\sin(t(\frac{n+1}{2}))}{\sin(t/2)}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2(t(\frac{n+1}{2}))}{\sin^2(t/2)}$$

On vérifie $U_n(0) = n+1 > 0$ donc U_n est positive.

▶ 3^e condition

$\forall a \in]0,\pi[$, $\forall t \in D_a$, on a :

$|U_n(t)| \leqslant \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin^2(t/2)} \leqslant \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2(\frac{a}{2})}$ ← preuve ? faire un dessin du cercle trigo !

et on obtient une majoration ne dépendant pas de t, d'où la 3^e propriété par convergence dominée.

▶ 2^e condition :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} v_k(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-k}^{k} e_j(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-k}^{k} \int_{-\pi}^{\pi} e_j(t)\,dt \quad ??$$

$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (2\pi)$ ← car où $j=0$, les autres sont nuls par calculs de l'$\int$

$$= \frac{n+1}{n+1}$$

$$= 1$$

d'où le lemme.

Terminons la preuve du théorème :

$$|C_n(t) - f(t)| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\, U_n(y)\,dy - \underbrace{c_0(U_n)}_{\substack{c_0(U_n)=1 \\ \text{par lemme}}} \cdot f(t)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\, U_n(y)\,dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, U_n(\sigma)\,d\sigma\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t-\sigma) - f(t)] \cdot U_n(\sigma)\,d\sigma\right|$$

car U_n à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par lemme $\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-\sigma) - f(t)| \cdot U_n(\sigma)\,d\sigma$

Soit $\varepsilon > 0$. Rappellons que comme f est continue et périodique, elle est uniformément continue :

$\forall y,\ \exists \alpha > 0 ;\ |y| \leq \alpha \Rightarrow |f(t-y) - f(t)| \leq \varepsilon$

(on peut supposer $\alpha < \pi$ quitte à le réduire), on a alors :

$$|\sigma_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \|f\|_\infty \int_{D_\alpha} V_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varepsilon \cdot V_n(y)\,dy$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left(\|f\|_\infty \cdot \int_{D_\alpha} V_n(t)\,dt + \varepsilon \right)$$

$\blacksquare$

À l'oral

Dire que :

* Différence entre noyau de Féjèr et noyau de Dirichlet, la positivité du noyau de Féjèr permet le résultat.

question attendue:

f est $\mathcal{C}^0$, 2π périodique.

Mq $\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$.

- preuve :

$$\int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\,dt = \int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt$$

puis changement de var :

$$\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\,dt \underset{s=t-2\pi}{=} \int_0^a f(s)\,ds$$

$\square$